Tentamen *Analyse op variteiten*
6 juli 2010, 09:00–12:00

Dit tentamen bestaat uit vier sommen. Je mag de antwoorden zowel in het Nederlands als in het Engels geven.

Som 1

Voor twee vectorvelden A, B in $\mathbf{R}^3$ met standaard-coordinaten (x, y, z) definiëren we

$$\sigma(A, B) = \langle A \times B, \mathbf{e}_z \rangle,$$

waarbij $\times$ het uitwendig product is van $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{e}_z$ de eenheidsvector in de z-richting, en waarbij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard inwendig product is van $\mathbf{R}^3$.

(a) Toon aan dat σ voldoet aan de definitie van een 2-vorm en toon vervolgens aan dat $\sigma = dx \wedge dy$.

(b) Laat $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ de standaard volume vorm van $\mathbf{R}^3$ zijn. Toon aan dat $\sigma = \iota_{\mathbf{e}_z} \Omega$.

(c) Laat $\alpha = 2y\, dx + z\, dy + dz$. Bereken dan $d\alpha$, $\alpha \wedge \sigma$, and $\alpha \wedge \Omega$.

Som 2

Beschouw de 2-kubus $c : [0,1]^2 \to \mathbf{R}^3$ gegeven door $c(s,t) = (s, t, st)$ en de 2-vorm $\omega = dx \wedge dy + 2x\, dx \wedge dz$.

(a) Bereken $\int_c \omega$.

(b) Bepaal de rand van c.

(c) Vind twee verschillende 1-vormen α en β met $\omega = d\alpha$ en $\omega = d\beta$.

(d) Verifieer de Stokes formule voor dit geval door direct $\int_{\partial c} \alpha$ te berekenen en het daarna resultaat te vergelijken met onderdeel (a).

(e) Bewijs dat voor elke 1-vorm σ, waarvoor geldt dat $\omega = d\sigma$, ook geldt dat $\int_{\partial c} \sigma = \int_{\partial c} \alpha$.

Som 3

Beschouw $\mathbf{R}^2$ met standaard-coordinaten (x, y).

(a) Toon aan dat de 2-vorm $\Omega = dx \wedge dy$ on $\mathbf{R}^2$ niet-gedegenereerd is. (Dit betekent dat als $\Omega(Y, Z) = 0$ voor alle vectorvelden Z, dat dan ook $Y = 0$.)

(b) Gegeven een functie $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, bereken dan het vectorveld X dat voldoet aan de vergelijking $\iota_X \Omega = dH$; schrijf het bijbehorende stelsel gewone differentiaalvergelijkingen op.

zie ommezijde

Beschouw nu het algemenere geval waarin m een positief geheel getal is, een functie $H : \mathbf{R}^{2m} \to \mathbf{R}$ en een niet-gedegenereerde 2-vorm ω.

(c) Toon aan dat het vectorveld X, gedefinieerd door $\iota_X\omega = dH$, eenduidig gedefinieerd is.

(d) Toon aan H een (eerste) integraal van X is, d.w.z., dat H constant is langs de integraalkrommen van X.

(e) Beschouw een tweede functie $G : \mathbf{R}^{2m} \to \mathbf{R}$ en definieer het vectorveld Y door $\iota_Y\omega = dG$. Toon aan dat G een integraal is van X, dan en slechts dan als $\omega(X, Y) = 0$.

Som 4

Beschouw de afbeelding $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ gegeven door $F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 + 1$, en de nul-verzameling $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$.

(a) Toon aan dat C een deelvariëteit van $\mathbf{R}^3$ is.

(b) Geef een parametrisatie voor $C_+ = \{(x, y, z) \in C : x > 0\}$.

(c) Bewijs dat

$$\mathrm{T}_{(x,y,z)}C = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3 : z\xi_3 - x\xi_1 - y\xi_2 = 0\}.$$

(d) Bewijs dat C diffeomorf is met $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$.

(e) Bewijs dat C niet enkelvoudig samenhangend is.

Tentamen *Analyse op variteiten*
6 juli 2010, 09:00–12:00

This exam consists of 4 exercises. You can answer the exam in Dutch or English.

Exercise 1

For two vector fields A, B in $\mathbf{R}^3$ with coordinates (x, y, z) define

$$\sigma(A, B) = \langle A \times B, \mathbf{e}_z \rangle,$$

where $\times$ denotes the exterior product in $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{e}_z$ is the unit vector in the z-direction, and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the standard inner product in $\mathbf{R}^3$.

(a) Show that σ satisfies the definition of a 2-form and then show that $\sigma = dx \wedge dy$.

(b) Denote by $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$ the standard volume form on $\mathbf{R}^3$. Show that $\sigma = \iota_{\mathbf{e}_z} \Omega$.

(c) Let $\alpha = 2y\, dx + z\, dy + dz$. Compute $d\alpha$, $\alpha \wedge \sigma$, and $\alpha \wedge \Omega$.

Exercise 2

Consider the 2-cube $c : [0,1]^2 \to \mathbf{R}^3$ given by $c(s, t) = (s, t, st)$ and the 2-form $\omega = dx \wedge dy + 2x\, dx \wedge dz$.

(a) Compute $\int_c \omega$.

(b) Compute the boundary of c.

(c) Find two different 1-forms α and β with $\omega = d\alpha$ and $\omega = d\beta$.

(d) Verify Stokes by computing directly $\int_{\partial c} \alpha$ and comparing the result to question (a).

(e) Show that for any 1-form σ for which $\omega = d\sigma$ we have $\int_{\partial c} \sigma = \int_{\partial c} \alpha$.

Exercise 3

Consider $\mathbf{R}^2$ with coordinates (x, y).

(a) Show that the 2-form $\Omega = dx \wedge dy$ on $\mathbf{R}^2$ is non-degenerate. This means that if $\Omega(Y, Z) = 0$ for all vector fields Z, then $Y = 0$.

(b) Given a function $H : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ compute the vector field X that satisfies $\iota_X \Omega = dH$ and write the corresponding system of differential equations.

See other side

Consider now the general case where m is any positive integer, a function $H : \mathbf{R}^{2m} \to \mathbf{R}$, and a non-degenerate 2-form ω.

(c) Show that the vector field X, defined by $\iota_X \omega = dH$, is uniquely defined.

(d) Show that H is a (first) integral of X, that is, H is constant along the integral curves of X.

(e) Consider a second function $G : \mathbf{R}^{2m} \to \mathbf{R}$ and define the vector field Y by $\iota_Y \omega = dG$. Show that G is an integral of X if and only if $\omega(X, Y) = 0$.

Exercise 4

Consider the map $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ given by $F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 + 1$, and the zero set $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$.

(a) Show that C is a submanifold of $\mathbf{R}^3$.

(b) Give a parameterization for $C_+ = \{(x, y, z) \in C : x > 0\}$.

(c) Show that

$$\mathrm{T}_{(x,y,z)} C = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3 : z\xi_3 - x\xi_1 - y\xi_2 = 0\}.$$

(d) Show that C is diffeomorphic to $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$.

(e) Show that C is not simply connected.

4

Tentamen Analyse op Variëteiten 6 juli 2010

1 a $\sigma : A, B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Stel $A = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z$

$B = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z$

$\sigma(A,B) = \langle A \times B, \vec{e}_z \rangle$

$= \left\langle \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}, \vec{e}_z \right\rangle$

$= \langle \vec{e}_x (A_y B_z - A_z B_y) - \vec{e}_y (A_x B_z - A_z B_x) + \vec{e}_z (A_x B_y - A_y B_x), \vec{e}_z \rangle$

$= A_x B_y - A_y B_x = dx \wedge dy\,(A,B)$

$\sigma = dx \wedge dy$

~~b $M = M_x e_x + M_y e_y + M_z e_z$ vectorveld~~

~~$i_M \Omega = d M^b$~~

~~$dM^b = M_x dx + M_y dy + M_z dz$~~

~~$i_M \Omega = dM^b = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial M_z}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) dy \wedge dz$~~

b $i_{e_z} \Omega = \underbrace{dx(e_z)}_{=0} dy \wedge dz - \underbrace{dy(e_z)}_{=0} dx \wedge dz + \underbrace{dz(e_z)}_{=1} dx \wedge dy = dx \wedge dy = \sigma$

c $d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy + \frac{\partial \alpha}{\partial z} dz$

$= 2y \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + 0 + 0 + 2\, dy \wedge dx + 2 \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} + 0 + 0 + dz \wedge dy + \underbrace{dz \wedge dz}_{=0}$

$= -2\, dx \wedge dy - dy \wedge dz$

$\alpha \wedge \sigma = (2y\, dx + 2\, dy + dz) \wedge (dx \wedge dy) = 2y\, dx \wedge dx \wedge dy + 2\, dy \wedge dx \wedge dy + dz \wedge dx \wedge dy = dz \wedge dx \wedge dy$

$\alpha \wedge \Omega = (2y\,dx^2 + z\,dy + dz) \wedge (dx \wedge dy \wedge dz)$

$= 0$

$(dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n = 0)$

2 b $\partial c = c(2,0) + c(1,1) - c(0,0) - c(2,1)$

don't add together $= (s,0,0) + (1,t,t) - (0,t,0) - (s,1,s)$

$= (1, -1, t-s)$ $x \to 1$, $y \to -1$, $z \to t-s$

c $\alpha = x^2\,dz + x\,dy$

$\beta = -y\,dx - 2zx\,dx$

a $\int_c \omega = \int_0^1\int_0^1 c^*\omega$

$c^*(x) = s$ $\qquad c^*(dx) = ds$

$c^*(y) = t$ $\qquad c^*(dy) = dt$

$c^*(z) = st$ $\qquad c^*(dz) = s\,dt + t\,ds$

$c^*(\omega) = c^*(dx \wedge dy) + c^*(2x\,dx \wedge dz)$

$= ds \wedge dt + 2s\,ds \wedge (s\,dt + t\,ds)$

$= ds \wedge dt + 2s^2\,ds \wedge dt + 2st\,\underbrace{ds \wedge ds}_{=0}$

$= (2s^2+1)\,ds \wedge dt$

~~$\int_c \omega = \int_0^1 (2s^2+1)\,ds \wedge dt = (\frac{2}{3}s^3 + s)\Big|_0^1 dt\ t \ldots + 1 - \frac{5}{3}$~~

~~$+ (2s^2 t + t)\Big|_0^1 ds = \frac{5}{3}dt + (2s^2+1)\,ds$~~

~~$d\int_{\partial c} \alpha = \int_{\partial c} x^2\,dz + x\,dy$~~ $= \int_{\partial c} ts^2\,ds + s^3\,dt + s\,dt$

$\int_c \omega = \int_0^1\int_0^1 (2s^2+1)\,ds \wedge dt = \int_0^1 (\frac{2}{3}s^3 + s)\Big|_0^1 dt = \int_0^1 \frac{5}{3}dt = \frac{5}{3}t\Big|_0^1 = \frac{5}{3}$

~~$\int_{\partial c} \alpha = \int_{\partial c} x^2\,dz + x\,dy = \int_{\partial c} ts^2\,ds + s^3\,dt + s\,dt$~~

$d\int_{\partial c} \alpha = \int_{\partial c} x^2\,dz + x\,dy = \int_0^1 dt - ds = \int_0^1 dt - \int_0^1 ds$

$= t\Big|_0^1 - s\Big|_0^1 = 1 - 1 = 0$

Hier gaat iets mis ... gelijk aan het antwoord van a

e σ 1-vorm $\quad \omega = d\sigma \quad \omega = d\alpha$

$\int_{\partial c} \sigma = \int_c \omega = \int_{\partial c} \alpha$

stokes stokes

3a $\Omega = dx \wedge dy$

$\Omega(Y, Z) = d Y \wedge dZ$

$Y = Y_x e_x + Y_y e_y$

$Z = Z_x e_x + Z_y e_y$

$\Omega(Y, Z) = Y_x Z_y \, dx \wedge dy + Y_y Z_x \, dy \wedge dy$

$= (Y_x Z_y - Y_y Z_x) \, dx \wedge dy$

$= 0 \ \forall Z$ dan moet gelden

$Y_x Z_y - Y_y Z_y = 0 \ \forall Z$ dus $Y_x = 0$ en $Y_y = 0$

en dus $Y = 0$

b $X = X_x e_x + X_y e_y + X_z e_z$ vectorveld

$H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$i_X \Omega(Y) = \Omega(X, Y) = dH = dx \wedge dy \to H = x dy$

$H^{(x,y)} = x(X) dy(Y) + x(Y) dy(X) = X Y_y + Y X_y$

$dH = \dot{H}^{(x,y)} = dx(X) \wedge dy(Y) + dx(Y) \wedge dy(X) = (X_x Y_y - X_y Y_x) dx \wedge dy$

~~stel X_1 en X_2 voldoen aan $i_X \Omega = dH$~~

~~$i_{X_1} \Omega = i_{X_2} \Omega = dH \qquad \Omega = (Y_1, \ldots, Y_n)$~~

~~$= \Omega(X_1, Y_1, \ldots, Y_n) = \Omega(X_2, Y_1, \ldots, Y_n)$~~

~~$\Omega(X_1, Y_1, \ldots, Y_n) - \Omega(X_2, Y_1, \ldots, Y_n) = 0$~~

~~Ω lineair dus:~~

~~$\Omega(X_1 - X_2, Y_1, \ldots, Y_n) = 0 \qquad \Omega = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$~~

~~stel $\Omega = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_m}$ met $1 \le i \le n$~~

~~$\Omega(X_1 - X_2, Y_1, \ldots, Y_n) = 0$~~

~~$= dy_1(X_1 - X_2) \, dy_2 \wedge \ldots dy_n - dy_2(X_1 - X_2) \, dy_1 \wedge dy_3 \wedge \ldots \wedge dy_n$~~

~~$+ \ldots + (-1)^{n+1} dy_n(X_1 - X_2) \, dy_1 \wedge d\check{x}_2 \wedge \ldots d \wedge dy_{n-1}$~~

~~$= 0 \ \forall Y_1, \ldots, Y_n$ dus $dy_i(X_1 - X_2) = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$~~

~~dus $X_1 - X_2 = 0 \quad X_1 = X_2$, dus X is~~

~~een duidelijk ... [illegible]~~

4a $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ bestaat zodat:

$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 0\}$ $\qquad a = (x_0, y_0, z_0) \in C$

$F(a) = 0 \qquad F(V) = 0 \in \mathbb{R}$ dus C deelvariëteit van $\mathbb{R}^3$

~~b $x = \sin(\theta)$ $\qquad \theta \in \langle 0, \pi \rangle$~~

~~$y = \cos(\theta) (R^2 - 1)$ $\qquad \varphi \in [0, 2\pi]$~~

~~$z = R$~~

c $T_{(x,y,z)} C = \mathrm{im}(D_{(x,y,z)} F)$ ker

$D_{(x,y,z)} C = 2z - 2y - 2x = 0 = D_{(x,y,z)}|_{F=0}$

$z - y - x = 0$

$T_{(x,y,z)} C = \mathrm{im}(2z - 2y - 2x = 0)$

$= \{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z\xi_3 - y\xi_2 - x\xi_1 = 0 \}$

$\langle \begin{smallmatrix} z \\ -y \\ -x \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} \xi_3 \\ \xi_2 \\ \xi_1 \end{smallmatrix} \rangle = z\xi_3 - y\xi_2 - x\xi_1 = 0$

d C diffeomorf met $S^1 \times \mathbb{R}$:

$\exists$ gladde h, h^{-1} met

$h: C \to S^1 \times \mathbb{R}$ en $h^{-1}: S^1 \times \mathbb{R} \to C$

$h(\underset{\in C}{x,y,z}) = (\sin(\theta), \cos(\theta)\sqrt{1+R^2}, R) \in S^1 \times \mathbb{R}$ glad

$h^{-1}(\sin(\theta), \cos(\theta)\sqrt{1+R^2}, R) = \underset{\in C}{(x,y,z)}$ glad

b $\left\{ \begin{array}{l} x = \sin(\theta) \\ y = \cos(\theta)\sqrt{1+R^2} \\ z = R \end{array} \right.$ $\qquad \theta \in \langle 0, \pi \rangle$, $R \in \mathbb{R}$

$1 = y^2 - z^2 \qquad y = \sqrt{1+z^2}$

$(R+1)^2 - (R-1)^2 = R^2 + 2R + 1$

d $z^2 + 1 = R^2 + 1$ $\qquad$ ~~$y^2 = \cos^2(\theta)(1+R^2)$~~

~~$\frac{y^2}{z^2+1} = \cos^2(\theta)$~~

$\cos(\theta) = \sqrt{\frac{y^2}{z^2+1}} = \frac{y}{\sqrt{z^2+1}}$ $\qquad \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta) = \frac{x}{\frac{y}{\sqrt{z^2+1}}} = \frac{x\sqrt{z^2+1}}{y}$

$\theta = \arctan\left(\frac{x\sqrt{z^2+1}}{y}\right)$ $\qquad \theta \in \langle 0, \pi \rangle$

Tentamen Analyse op Variëteiten 6 juli 2010

1a $D_{(x,y,z)}\sigma(a) = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_1}{\partial x}(a) & \frac{\partial\sigma_1}{\partial y}(a) & \frac{\partial\sigma_1}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial x}(a) & \frac{\partial\sigma_2}{\partial y}(a) & \frac{\partial\sigma_2}{\partial z}(a) \\ \frac{\partial\sigma_3}{\partial x}(a) & \frac{\partial\sigma_3}{\partial y}(a) & \frac{\partial\sigma_3}{\partial z}(a) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0$ ~~dus σ~~

?

$\sigma = \sigma_1\, dy \wedge dz + \sigma_2\, dx \wedge dy + \sigma_3\, dx \wedge dz) = 1\, dx \wedge dy$

$D_{(x,y,z)}\sigma(a) = 0$ ~~dus σ voldoet ni~~

voldoet aan definitie 2-vorm

3c $H : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}$

ω niet gedegenereerde 2-vorm

Stel X_1 en X_2 voldoen aan:

$\iota_X \omega = dH$

dan $\iota_{X_1}\omega = \iota_{X_2}\Omega = dH$

$= \omega(X_1, Y) = \omega(X_2, Y)$

ω is lineair dus:

$\omega(X_1, Y) - \omega(X_2, Y) = \omega(X_1 - X_2, Y) = 0$

ω is niet gedegenereerd, ~~dus~~ $\omega(X_1 - X_2, Y) = 0$ $\forall Y$

betekent $X_1 - X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = X_2$

Dus X eenduidig gedefinieerd

d $\iota_X \omega = dH$

$\iota_X \omega(Y) = dH(Y) = \omega(X, Y)$

Dus dH ~~(X,Y)~~ is alleen afhankelijk van Y,

en dus is H constant langs de integraalkrommen van X

e ($\Rightarrow$) $\iota_Y \omega = dG$

$\iota_Y \omega(X) = dG(X) = \omega(X, Y) = \omega(Y, X)$

G onafh van Y dus $\omega(X, y) = 0$ ~~[illegible]~~

$\rightarrow$ G is een integraal van X $(dG(X) = 0)$

($\Leftarrow$) $\underset{dG(X)=0}{\omega(x, y) = 0} = $ ~~[illegible]~~ $\omega(Y, X) = \iota_Y \omega(X) = dG(X)$

$\rightarrow$ G is een integraal van X

[illegible]

4e $(0,0,0) \notin C$

$C_+ : \{(x,y,z) \in C : x > 0\}$

$C_- : \{(x,y,z) \in C : x < 0\}$ parametrisatie

$x = \sin(\theta)$ $\theta \in \langle -\pi, 0 \rangle$

$y = \cos(\theta) \sqrt{1+r^2}$ $r \in \mathbb{R}$

$z = r$

dus $C_-, C_+ \in C$; $(0,0,0) \notin C$

dus C is niet enkelvoudig samenhangend;

schets